עבודה לסמינר בקומבינטוריקה

21 בפברואר 2020

בעבודה זו נוכיח את התוצאה המרכזית של המאמר [2] מאת Jarosław Grytxzuk ו־Xuding Zhu. התוצאה היא:

משפט 0.1 בכל גרף מישורי G, יש זיווג M כך ש־ $AT(G-M) \leq 4$.

המספר $AT(\cdot)$ נקרא "מספר אלון–טרסי" והוא פרמטר של גרפים שיוגדר בהמשך. המוטיבציה המרכזית להגדרה היא "מספר הצביעה ברשימות" (choice number): $ch(\cdot)$. לכל גרף G מתקיים $ch(G) \leq AT(G)$, ולכן אותו משפט נכון כאשר מחליפים את מספר אלון–טרסי במספר הצביעה ברשימות. הוכחת המשפט דומה בצורתה להוכחה של משפט קודם, שהוכח על ידי Carsten Thomassen ב־[5]:

משפט 0.2 לכל גרף G מישורי, מתקיים $ch(G) \leq 5$.

לכן כרקע, נוכיח זאת בסעיף 1. בחלק הראשון של [2] מוצגות כמוטבציה מספר שאלות שעליהן משפט 0.1 מספק תשובה. חלק מהן דנות בפרמטר נוסף, $\chi_P(\cdot)$, שאנו נכנה בשם "מספר הצביעה המשחקי" (paint number) שהוגדר על ידי Uwe Schauz ב־[3].[1] בסעיף 2 נדון במספר הצביעה המשחקי, ונראה שבמשפט 0.2 ניתן להחליף את $ch(G)$ ב־$\chi_P(G)$.

בסעיף 3 נגדיר את מספר אלון–טרסי, ונוכיח את משפט האפסים הקומבינטורי, שממנו נובע $ch(G) \leq AT(G)$. בנוסף, נראה שבמשפט 0.2 ניתן להחליף את $ch(G)$ ב־$AT(G)$.

בסעיף 4 נוכיח את משפט 0.1.

הערות לגבי קונבנציות: במילה "גרף" נתכוון רק לגרפים פשוטים, כלומר ללא לולאות או קשתות כפולות. פונקציית אינדיקטור של קבוצה V תסומן $\mathbf{1}_V$, כלומר $\mathbf{1}_V(v) = 1$ אם $v \in V$ ו־$\mathbf{1}_V(v) = 0$ אחרת. בנוסף $\mathbf{1}_v := \mathbf{1}_{\{v\}}$. הסמל $\sqcup$ מסמן איחוד של קבוצות זרות.

1 צביעה ברשימות והמשפט של תומסן

הגדרה 1.1 (צביעות ברשימות) פונקציה L המתאימה לכל צומת ב־$V(G)$ קבוצה, נקראת קונפיגורציית רשימות בגרף G.

פונקציה c המתאימה לכל $v \in V(G)$, איבר ב־$L(v)$ תיקרא צביעה המתאימה לקונפיגורציה.

צביעה c תקרא נאותה, אם לכל זוג צמתים סמוכים u, v מתקיים $c(u) \neq c(v)$.

תהי $f : V(G) \to \mathbb{N}$. על קונפיגורציית רשימות L נאמר שהיא בגודל f אם לכל $v \in V(G)$ מתקיים $|L(v)| = f(v)$. (כאשר $|\cdot|$ מסמן מספר איברים בקבוצה)

אם לכל קונפיגרוציית רשימות בגודל f יש צביעה נאותה המתאימה לה, נאמר ש־G הוא f־צביע ברשימות (f-choosable).

מספר הצביעה ברשימות $ch(G)$ הוא המספר המינימלי k כך ש־G הוא k־צביע ברשימות (כאן אנו רואים את k כפונקציה קבועה מקבוצת הצמתים של G).

[1] השאלות המוצגות ב־[2] דנות גם במושגים מוכללים של "d-defective k-choosable graph" ו"d-defective k-paintable graph", אך אנו לא נדון במושגים האלה. נאמר רק שמשפט 0.1 הוא חזק יותר מהטענה שכל גרף מישורי הוא 1-defective 4-paintable.

לשם הוכחת המשפט של תומסן, נגדיר מושג נוסף:

הגדרה 1.2 נאמר ש־G הוא f־פתיר[2], אם הזוג (G,f) שייך לקבוצה $\mathcal{S}$ המינימלית ביחס להכלה שמתקיימות בה התכונות הבאות:

1. אם ב־G אין קשתות, אז $(G,1)\in\mathcal{S}$
2. אם $(G,f)\in\mathcal{S}$ ו־$v\in V(G)$, אז $(G,f+\mathbf{1}_v)\in\mathcal{S}$
3. אם $(G,f)\in\mathcal{S}$ ו־$u,v\in V(G)$ ו־$uv\notin E(G)$, אז $(G\cup uv, f+f(u)\cdot\mathbf{1}_v)\in\mathcal{S}$

במילים אחרות, G הוא f פתיר, אם לכל v, $f(v)\geq 1$ וניתן למחוק את כל הקשתות על ידי פעולות משני הסוגים הבאים:

1. **הקטנה ב־1:** בהנתן ש־$f(v)\geq 2$, להקטין את $f(v)$ ב־1.
2. **מחיקת קשת:** בהנתן קשת $e=uv$, ובהנחה ש־$f(v)>f(u)$, להקטין את $f(v)$ ב־$f(u)$ ולמחוק את הקשת e.

למה 1.3 יהי גרף G במישור. ותהי e בפאה החיצונית[3] של G. נגדיר $f:V(G)\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$f(v)=\begin{cases}1 & v\in e\\ 3 & \text{אחרת אם } v \text{ בפאה החיצונית}\\ 5 & \text{אחרת}\end{cases}$$

אזי $G-e$ הוא f־פתיר.

הוכחה: נניח בשלילה קיום של דוגמה נגדית (G,e) עם מספר צמתים מינימלי. אם ב־G יש רק שני צמתים, הטענה טריוויאלית. אחרת נוכל להוסיף ל־G קשתות, עד שיהפוך לגרף קשיר $\bar{G}$ שהפאה החיצונית שלו היא מעגל וזאת מבלי לשנות את קבוצת הצמתים הנמצאים בפאה החיצונית, וכך ש־e תישאר בפאה החיצונית. נוכיח את הטענה לגבי הגרף $\bar{G}$, כלומר ש־$\bar{G}$ הוא f־פתיר. מאחר ש־$G\subseteq\bar{G}$ נובע שגם G הוא f־פתיר. לכן נוכל להניח בה"כ ש־G קשיר והפאה החיצונית שלו היא מעגל. נסמן אותה ב־$v_1,v_2,\ldots,v_n$ לפי הסדר בכיוון השעון, כאשר $e=v_1v_2$.

נפריד למקרים כשבכל מקרה נראה כיצד ניתן להתחיל בגרף $G-v_1v_2$ ביחד עם הפונקציה f ולבצע פעולות עד למחיקה של כל הקשתות:

מקרה 0: אם G הוא משולש[4] $v_1v_2v_3$, אז $f(v_1)=f(v_2)=1$ ו־$f(v_3)=3$, אז נוכל למחוק את הקשתות v_1v_2 ו־v_1v_3.

מקרה 1: אם ב־G יש מיתר, כלומר קשת המחברת בין שני צמתים לא סמוכים על הפאה החיצונית, נסמן את המיתר ב־v_iv_j. המיתר מפריד את צומתי G לשתי קבוצות שהחיתוך שלהן הוא $\{v_i,v_j\}$, נסמן ב־G_1 וב־G_2 את התת־גרפים המושרים על ידי שתי הקבוצות, כך שהקשת v_1v_2 נמצאת ב־G_1. הגרף G_1 והצמצום של f ל־$V(G_1)$ מתאימים לתנאי הלמה, לכן ניתן לבצע פעולות שיביאו למחיקה של כל הקשתות ב־$G_1-v_1v_2$. לאחר מכן אפשר להקטין את $f(v_i)$ ו־$f(v_j)$ עד ל־1, וכעת הגרף G_2 והצמצום של f ל־$V(G_2)$ מתאימים לתנאי הלמה, ולכן ניתן להמשיך ולמחוק את קשתות $G_2-v_iv_j$. בתהליך זה מחקנו את כל הקשתות.

מקרה 2: אם ב־G אין מיתר, נסמן את השכנים של הצומת v_n לפי הסדר בכיוון השעון: $v_{n-1},u_1,\ldots u_kv_1$ (יתכן $k=0$). הצמתים $u_1,\ldots u_k$ אינם בפאה החיצונית, כי אין מיתר. נמחק את הקשת v_1v_n. לאחר מכן $f(v_n)=2$. נמחק את הקשתות $v_nu_1,\ldots,v_nu_k$, ואז $f(u_1)=\cdots=f(u_k)=3$.

נתבונן בגרף $G-v_n$. הקשת v_1v_2 נמצאת בפאה החיצונית שלו וכך גם הצמתים $v_3,\ldots,v_{n-1}$ והצמתים $u_1,\ldots,u_k$. יהי $v\in V(G-v_n)$. אם $v\in\{v_1,v_2\}$ אז $f(v)=1$. אחרת, אם v בפאה החיצונית של $G-v_n$ אז $f(v)\geq 3$ ונוכל להקטין את $f(v)$ עד שיתקיים $f(v)=3$. אם v אינו בפאה החיצונית של $G-v_n$ אז בוודאות $f(v)=5$.

[2] זוהי הגדרה "אד־הוק" לצורך עבודה זו. המטרה שלה היא להראות את המשותף בין הוכחת משפט 0.2 לבין ההכללות שלו עבור מספר הצביעה המשחקית ומספר אלון–טרסי.

[3] יתכן ו־G אינו קשיר. במקרה כזה הכוונה במושג "פאה חיצונית" היא לאיחוד הפאות החיצוניות של הרכיבים.

[4] למעשה מקרה 1 כלול בתוך מקרה 3, אבל הוא משמש לנו כ"חימום".

לכן מטענת הלמה עבור $G-v_n$ נובע שניתן להמשיך לבצע פעולות ב־$G-v_1v_2$, עד למחיקה של כל הקשתות שלא חלות ב־v_n, כלומר תישאר רק הקשת $v_{n-1}v_n$. מאחר שבשלב זה $f(v_n)=2$, אפשר להקטין את $f(v_{n-1})$ לאחת, ואז למחוק את הקשת האחרונה. ■

מסקנה 1.4 גרף מישורי הוא 5־פתיר.

מהלמה הבאה ביחד עם מסקנה האחרונה נובע משפט 0.2.

למה 1.5 אם G הוא f־פתיר אזי הוא f־צביע ברשימות.

הוכחה: נסמן ב־$\mathcal{C}$ את קבוצת הזוגות (G,f) כך ש־G הוא f־צביע ברשימות. אז עלינו להראות ש־$\mathcal{C}$ מקיימות את שלוש התכונות המאפיינות הקבוצה $\mathcal{S}$ בהגדרה 1.2.

1. אם ב־G אין קשתות, אז ודאי שהוא 1־צביע ברשימות.
2. אם G הוא f צביע ברשימות, אז ברור שהוא גם $(f+\mathbf{1}_v)$־צביע ברשימות.
3. אם G הוא f צביע ברשימות, עלינו להראות ש־$G\cup uv$ הוא $(f+f(u)\cdot\mathbf{1}_V)$־צביע ברשימות. אכן, בהינתן קונפיגורצית רשימות L בגודל $f+f(u)\cdot\mathbf{1}_V$, נגדיר קונפיגורציה L' המזדהה עם L בכל הצמתים פרט ל־v, ומקיימת $L'(v)=L(v)-L(u)$. אז $L'(v)$ היא בגודל לפחות $f(v)+f(u)-f(u)=f(v)$, אז L' היא בגודל לפחות f. לכן ל־G יש צביעה נאותה המתאימה ל־L' ובפרט מתאימה גם ל־L. אבל $L'(v)\cap L'(u)=\emptyset$, לכן אותה צביעה נאותה גם עבור $G\cup uv$.

■

2 צביעה משחקית

המושג של צביעה משחקית מוגדר במאמר במטרה להציג שאלות נוספות שעליהן עונה 0.1. המושג הוצג לראשונה ב־[3]. בהנתן גרף G ופונקציה f נתבונן במשחק הבא, המשוחק בין מר צבע לגברת נאות. בתחילה אף צומת בגרף אינו צבוע. בכל סבב, מר צבע בוחר קבוצה לא ריקה V_P של צמתים לא צבועים, ומציע לצבוע אותם בצבע חדש שלא הופיע בסבבים קודמים. לאחר מכן גברת נאות בוחרת תת־קבוצה $V_C\subseteq V_P$, וצובעים את צומתי V_C. אם צומת v נכלל בהצעה של מר צבע בפעם ה־$f(v)$, אז גברת נאות מחוייבת לכלול אותו בבחירה שלה. המשחק מסתיים כאשר כל הגרף נצבע. אם הצביעה המתקבלת בסוף המשחק היא נאותה אז גברת נאות היא המנצחת, ואחרת מר צבע מנצח. אם גברת נאות יכולה להבטיח את נצחונה, נאמר ש־G הוא f־צביע משחקית (f-paintable). מספר הצביעה המשחקית $\chi_P(G)$ הוא המספר המינימלי k כך ש־G הוא k־צביע משחקית.

נציג הגדרה רקורסיבית שקולה:

הגדרה 2.1 יהי גרף G ותהי פונקציה $f:V(G)\to\mathbb{N}$. נאמר ש־G הוא f־צביע משחקית אם אם לכל צומת v, מתקיים $f(v)\geq 1$, ולכל קבוצה לא ריקה V_P של צמתים, יש תת קבוצה בלתי תלויה V_C, כך שהגרף $G-V_C$ הוא $(f-\mathbf{1}_{V_P})$־צביע משחקית[5].

טענה 2.2 אם G הוא f־צביע משחקית אזי הוא f־צביע ברשימות. בפרט $\chi_P(G)\geq ch(G)$.

הוכחה: תהי קונפיגורציית רשימות L בגודל f. נציג אסטרטגיה עבור מר צבע כאשר משחקים בגרף G עם הפונקציה f: בכל תור מר צבע יבחר צומת v שעוד לא נצבע. לא יתכן שכל הצבעים ב־$L(v)$, הופיעו בסבבים קודמים, כי זה אומר שמר צבע כבר הציע לצבוע את v בדיוק $f(v)=|L(v)|$ פעמים, ולכן גברת נאות הייתה חייבת לקבל את ההצעה האחרונה. לכן הוא יכול לבחור צבע $c\in L(v)$ שלא הופיע בסבב קודם. הוא יציע לצבוע את הקבוצה $\{v$ אינו צבוע וגם $V_P=\{v\,|\,c\in L(v)$ בצבע c.

ידוע שגברת נאות יכולה לנצח, ולכן תתקבל צביעה המתאימה ל־L. ■

[5] כאן יהיה מדויק יותר לרשום $(f-\mathbf{1}_{V_P})|_{V(G-V_C)}$ אך נמנע מכך כדי לא לסרבל את הרישום, ומאחר שהגרף שבו מדובר כולל בתוכו את המידע לגבי קבוצת הצמתים שיש להצטמצם אליה.

2.1 הכללה למשפט של תומסן

טענה 2.3 אם G הוא f־פתיר אזי הוא f־צביע משחקית.

הוכחה: נסמן ב־$\mathcal{P}$ את קבוצת הזוגות (G, f) כך ש־G הוא f־צביע משחקית. אז עלינו להראות ש־$\mathcal{P}$ מקיימות את שלוש התכונות המאפיינות הקבוצה $\mathcal{S}$ בהגדרה 1.2.

1. אם ב־G אין קשתות, ו־$f = 1$, אז כמובן $f \geq 1$, וכן לכל $\emptyset \neq V_P \subseteq V(G)$, הקבוצה $V_C := V_P$ היא בלתי תלויה, ו־$(G - V_C, f - \mathbf{1}_{V_P}) = (G - V_C, 1) \in \mathcal{P}$ באינדוקציה כי $G - V_C$ הוא גרף קטן יותר ללא קשתות.

2. יהיו $(G, f) \in \mathcal{P}$ ו־$v \in V(G)$. עלינו להראות $(G, f + \mathbf{1}_v) \in \mathcal{P}$. תהי $\emptyset \neq V_P \subseteq V(G)$. אז יש לה תת קבוצה V_C שהיא בלתי תלויה ב־G עם $(G - V_C, f - \mathbf{1}_{V_P}) \in \mathcal{P}$, לכן באינדוקציה, גם $(G - V_C, (f + \mathbf{1}_v) - \mathbf{1}_{V_P}) \in \mathcal{P}$ כנדרש.

3. יהיו $(G, f) \in \mathcal{P}$ ו־$u, v \in V(G)$ ונניח $uv \notin E(G)$. עלינו להראות $(G \cup uv, f + f(u) \cdot \mathbf{1}_v) \in \mathcal{P}$. נניח באינדוקציה שטענה דומה מתקיימת לכל $(G', f') \in \mathcal{P}$ בתנאי ש־$G' \subset G$. אז תהי $\emptyset \neq V_P \subseteq V(G \cup uv)$. מטרתינו להראות קיום של $V_C \subseteq V_P$ בלתי תלויה ב־$G \cup uv$ כך ש־$(G \cup uv - V_C, (f + f(u)\mathbf{1}_v) - \mathbf{1}_{V_P}) \in \mathcal{P}$. נפריד למקרים:
מקרה א, אם $u \notin V_P$: מכך ש־G הוא f־צביע משחקית, נובע שיש $V_C \subseteq V_P$ בלתי תלויה ב־G כך ש־$(G - V_C, f - \mathbf{1}_{V_P}) \in \mathcal{P}$. מכך ש־$u \notin V_C$ נובע ש־V_C גם בלתי תלויה ב־$G \cup uv$. מהנחת האינדוקציה לגבי $(G - V_C, f - \mathbf{1}_{V_P})$ נובע ש־$((G - V_C) \cup uv, f - \mathbf{1}_{V_P} + (f - \mathbf{1}_{V_P})(u) \cdot \mathbf{1}_v) \in \mathcal{P}$. ונשים לב ש־
$$f - \mathbf{1}_{V_P} + (f - \mathbf{1}_{V_P})(u) \cdot \mathbf{1}_v = (f + f(u) \cdot \mathbf{1}_V) - \mathbf{1}_{V_P}$$
מקרה ב, אם $u \in V_P$: נגדיר $V_P' = V_P - \{v\}$. מכך ש־G הוא f־צביע משחקית, נובע שיש $V_C \subseteq V_P$ בלתי תלויה ב־G כך ש־$(G - V_C, f - \mathbf{1}_{V_P'}) \in \mathcal{P}$. מכך ש־$v \notin V_C$ נובע ש־V_C גם בלתי תלויה ב־$G \cup uv$. מהנחת האינדוקציה לגבי $(G - V_C, f - \mathbf{1}_{V_P'})$,
נובע $((G - V_C) \cup uv, f - \mathbf{1}_{V_P'} + (f - \mathbf{1}_{V_P'})(u) \cdot \mathbf{1}_v) \in \mathcal{P}$. ונשים לב ש־
$$f - \mathbf{1}_{V_P'} + (f - \mathbf{1}_{V_P'})(u) \cdot \mathbf{1}_v = f + f(u)\mathbf{1}_v - \mathbf{1}_{V_P} + (1 - \mathbf{1}_{V_P'}(u)) \cdot \mathbf{1}_v = (f + f(u)\mathbf{1}_v) - \mathbf{1}_{V_P}$$
כך או כך קיבלנו תת־קבוצה V_C של V_P שהיא בלתי תלויה ב־$G \cup uv$.
בנוסף מתקיים $((G - V_C) \cup uv, (f + f(u)\mathbf{1}_v) - \mathbf{1}_{V_P}) \in \mathcal{P}$ ומאחר ש־$G \cup uv - V_C \subseteq (G - V_C) \cup uv$ אז בפרט הראינו את הנדרש.

■

ממסקנה 1.3 והטענה הקודמת נובע:

מסקנה 2.4 לגרף מישורי G מתקיים $\chi_P(G) \leq 5$

3 מספר אלון–טרסי

3.1 משפט האפסים

הגדרה 3.1 יהי P פולינום באוסף המשתנים $X = (X_v)_{v \in V}$. אם $\eta : V \to \mathbb{N}_0$, נסמן $X^\eta = \prod_{v \in V} X_v^{\eta(v)}$. המקדם של המונום X^η בפולינום $P(X)$ יסומן $c_{P,\eta}$. כאשר $c_{P,\eta} \neq 0$, נאמר שהמונום X^η אינו מתאפס.

נתחיל בהוכחת משפט האפסים הקומבינטורי, כפי שהוא מוכח ב־[1].

משפט 3.2 (משפט האפסים הקומבינטורי) יהי P פולינום במשתנים $X = (X_1, \ldots, X_n)$, ותהי $\eta : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}_0$. נניח שלכל $\theta \geq \eta$, מתקיים $c_{P,\theta} \neq 0$ אמם $\theta = \eta$. אם לכל $v \in \{1, \ldots, n\}$ מוגדרת קבוצה $L(v) \subseteq \mathbb{R}$ עם $|L(v)| > \eta(v)$, אזי יש $c_1, \ldots, c_n \in L(1) \times \cdots \times L(n)$ כך ש־$P(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$.

לצורך הוכחת המשפט, נשתמש ב:

למה 3.3 יהי P פולינום במשתנים $X = (X_1, \dots, X_n)$ ונניח שלכל $v \in \{1, \dots, n\}$ המעלה של X_v בכל אחד מהמונומים של P היא לכל היותר $\eta(v)$. נניח שלכל v, $L(v) \subseteq \mathbb{R}$ ו־ $|L(v)| > \eta(v)$, ונניח שלכל $c_1, \dots, c_n \in L(1) \times \dots \times L(n)$ מתקיים $P(c_1, \dots, c_n) = 0$. אזי P הוא פולינום האפס.

הוכחה: עבור $n = 0$ הטענה טריויאלית. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. נרשום

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k=0}^{\eta(n)} P_i(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^k$$

. יהיו $c_1, \dots, c_{n-1} \in L(1) \times \dots \times L(n-1)$, הפולינום $Q(X_n) \coloneqq P(c_1, \dots, c_{n-1}, X_n)$ הוא פולינום במשתנה אחד עם מעלה לכל היותר $\eta(n)$. ידוע לנו ש־$Q(c_n) = 0$ לכל $c_n \in L(n)$, אז $Q(X_n)$ מתאפס על קבוצת ערכים שגודלה הוא יותר מהמעלה שלו, ולכן $Q(X_n)$ הוא פולינום האפס, כלומר לכל $0 \le k \le \eta(n)$ מתקיים $P_k(c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$. הוכחנו זאת באופן כללי לכל $c_1, \dots, c_{n-1} \in L(1) \times \dots \times L(n-1)$,לכן מטענת האינדוקציה P_k הוא פולינום האפס. זה הוכח לכל $0 \le k \le \eta(n)$ לכן מהנוסחה המוצגת לעיל $P(X_1, \dots, X_n)$ הוא פולינום האפס. ■

הוכחה: (למשפט 3.2) נניח בשלילה שלכל $c_1, \dots, c_n \in L(1) \times \dots \times L(n)$ מתקיים $P(c_1, \dots, c_n) = 0$. יהי $v \in \{1, \dots, n\}$. נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש־$|L(v)| = \eta(v) + 1$. לכל $v \in \{1, \dots, n\}$ נגדיר

$$Q_v(X_v) \coloneqq \prod_{c_v \in L(v)} (X_v - c_v) = X_v^{\eta(v)+1} - \sum_{k=0}^{\eta(v)} q_{v,k} X_v^k$$

נשים לב שעבור $c_v \in L(v)$ מתקיים $Q_v(c_v) = 0$ כלומר $X_v^{\eta(v)+1} = \sum_{k=0}^{\eta(v)} q_{v,k} X_v^k$. לכן אם נבחר מונום של P שבו המעלה של X_v היא לפחות $\eta(v) + 1$, נוכל להציב בו את אגף ימין של השיוויון האחרון במקום אגף שמאל, מבלי לשנות את ערכי P על קבוצת הפרמטרים $L(1) \times \dots \times L(n)$. על ידי פעולות חוזרות מסוג זה נוכל להחליף את P בפולינום $\bar{P}$, שבו כל מונום הוא ממעלה לכל היותר $\eta(v)$ ב־X_v, לכל $v \in \{1, \dots, n\}$. נשים לב שהצבה במונום X^θ גורמת לשינויים רק במקדמים של מונומים עם מעריכים קטנים או שווים ל־θ. מאחר שלפי הנחות המשפט $\eta \ge \theta$ עם $\theta \neq \eta$ מתקיים $c_{P,\theta} = 0$ אז לא מתרחשות הצבות שמשנות את $c_{P,\eta}$. אז מצד אחד, $\bar{P}$ מתאים לתנאי הלמה אז הוא פולינום האפס, ומצד שני $c_{\bar{P},\eta} \neq 0$ וזו סתירה. ■

3.2 הגדרת מספר אלון–טרסי

הגדרה 3.4 יהי G גרף, ונבחר סדר מלא שרירותי על צומתי G, שיסומן "$<$". הפולינום של G הוא פולינום מעל $\mathbb{R}$ באוסף המשתנים $X = (X_v)_{v \in V(G)}$ הנתון על ידי:

$$P_G(X) \coloneqq \prod_{uv \in E(G), u<v} (X_u - X_v)$$

נגדיר סימון מקוצר למקדמי P_G: $c_{G,\eta} \coloneqq c_{P_G,\eta}$.

הגדרה 3.5 יהי G גרף ותהי $f : V(G) \to \mathbb{N}$, אם יש $\eta < f$ כך שהמקדם של x^η ב־P_G הוא שונה מ־0, נאמר ש־G הוא f־אלון–טרסי (f-Alon-Tarsi).
נסמן ב־$AT(G)$ את המספר השלם k המינימלי כך ש־G הוא k־אלון–טרסי.

מסקנה 3.6 יהי G גרף. ותהי $f : V(G) \to \mathbb{N}$. אם G הוא f־אלון–טרסי אזי G הוא f־צביע ברשימות. בפרט $AT(G) \ge ch(G)$

הוכחה: אם G הוא f־אלון–טרסי, אז יש $\eta < f$ כך ש־$c_{G,\eta} \neq 0$. מאחר ש־P_G הוא פולינום הומוגני, אז לכל $\theta \ge \eta$, מתקיים $c_{G,\eta} \neq 0$ אםם $\theta = \eta$. תהי קונפיגורציית רשימות L בגודל f, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שכל הצבעים בה הם מספרים ממשיים. מתקיים $|L(v)| > \eta(v)$ לכל $v \in V(G)$, לכן לפי

3.2 יש הצבה $c \in \prod_{v\in V(G)} L(v)$ כך ש־$P(c) \neq 0$, וזה שקול מהגדרת P_G לכך ש־c היא צביעה נאותה של G המתאימה ל־L. ■

למעשה אם G הוא f־אלון–טרסי, אז הוא גם f־צביע משחקית (ובפרט $AT(G) \geq \chi_P(G)$). עובדה זו מוכחת ב־[4], ולא נוכיח אותה כאן. לכן משפט 0.1 נכון גם כאשר מחליפים את $AT(\cdot)$ ב־$ch(\cdot)$ או $\chi_P(\cdot)$. אולם בניגוד למשפט 0.2 (שגם הוא תקף לאותם שלושה פרמטרים), ההוכחה שנציג למשפט 0.1 בסעיף הבא, משתמשת בתכונות הספציפיות למספר אלון–טרסי, ולמיטב הבנתי אין לה תרגום להוכחה ישירה עבור $ch(\cdot)$ או $\chi_P(\cdot)$.[6]

נוכל לתאר את מקדמי P_G במונחים של אוריינטציות של הגרף G. תהי D אוריינטציה של הגרף G, במילים אחרות, D הוא גרף מכוון המתקבל מ־G על ידי החלפת כל קשת uv בקשת מכוונת $\overrightarrow{uv}$ או $\overrightarrow{vu}$. בהמשך נשתמש במונחי אוריינטציות בהוכחת משפט 0.1.[7]

הגדרה 3.7 עבור אוריינטציה D של הגרף G, נסמן לכל $v \in V(G)$ את דרגה היציאה שלו ב־D על ידי $d^+_D(v) := |\{\overrightarrow{vu} \,|\, \overrightarrow{vu} \in D\}|$.

תהי פונקציה $\eta : V(G) \to \mathbb{N}_0$. אם מתקיים $d^+_D(v) = \eta(v)$ לכל $v \in V(G)$, נאמר שהאוריינטציה D מתאימה ל־η.

נגדיר את $or(G,\eta)$ להיות קבוצת האוריינטציות D המתאימות ל־η.

עבור קשת מכוונת $\overrightarrow{uv}$, נגדיר את הסימן של הקשת: $s(\overrightarrow{uv}) = \begin{cases} 1 & u<v \\ -1 & u>v \end{cases}$, ונגדיר את הסימן של האוריינטציה $s(D) = \prod_{\overrightarrow{uv}\in D} s(\overrightarrow{uv})$.

הטענה הבאה ברורה מהגדרת P_G:

טענה 3.8 $c_{G,\eta} = \sum_{d\in or(G,\eta)} s(D)$.

הכללה למשפט של תומסן

טענה 3.9 אם G הוא f־פתיר אזי הוא f־אלון–טרסי.

הוכחה: נסמן ב־$\mathcal{AT}$ את קבוצת הזוגות (G,f) כך ש־G הוא f־אלון–טרסי. אז עלינו להראות ש־$\mathcal{AT}$ מקיימות את שלוש התכונות המאפיינות הקבוצה $\mathcal{S}$ בהגדרה 1.2.

1. אם ב־G אין קשתות, אז $P_G(X) = 1$, לכן עבור $\eta = 0$ מתקיים $c_{G,\eta} = 1$, מתקיים $\eta + 1 \leq 1$ לכן G הוא 1־אלון–טרסי כלומר $(G,f) \in \mathcal{AT}$.
2. אם G הוא f־אלון–טרסי, אז יש η עם $\eta+1 \leq f$ כך ש־$c_{G,\eta} \neq 0$. בפרט מתקיים גם $\eta+1 \leq f+\mathbf{1}_v$, ובזאת הראינו ש־$(G, f+\mathbf{1}_v) \in \mathcal{AT}$.
3. יהיו $(G,f) \in \mathcal{AT}$ ו־$u,v \in V(G)$ ונניח $uv \notin E(G)$. אז יש η עם $\eta + 1 \leq f$ וכן $c_{G,\eta} \neq 0$. נגדיר $\alpha = \max\{\alpha \,|\, c_{G,\eta-\alpha\cdot\mathbf{1}_u+\alpha\cdot\mathbf{1}_v} \neq 0\}$, ונגדיר $\eta' = \eta - \alpha\cdot\mathbf{1}_u + (\alpha+1)\cdot\mathbf{1}_v$. נטען ש־$c_{G\cup uv,\eta'} \neq 0$. אכן

$$\begin{aligned} c_{G\cup uv,\eta'} &= \sum_{D\in or(G\cup uv,\eta')} s(D) \\ &= s(\overrightarrow{uv}) \sum_{D\in or(G,\eta-(\alpha+1)\cdot\mathbf{1}_u+(\alpha+1)\cdot\mathbf{1}_v)} s(D) + s(\overrightarrow{vu}) \sum_{D\in or(G,\eta-\alpha\cdot\mathbf{1}_u+\alpha\cdot\mathbf{1}_v)} \neq 0 \end{aligned}$$

כאשר הפיצול לשני מחוברים נובע מחלוקת האוריינטציות לפי הכיוון של הקשת uv. המחובר הראשון מתאפס והשני לא, כתוצאה מהגדרת α. מתקיים $\eta(u) + 1 \leq f(u)$, ומאחר שבהגדרת

[6] מתבקשת גם השאלה האם ניתן להכליל את משפט 0.1 למושג של פתירות, כלומר האם מכל גרף מישורי ניתן להסיר זיווג ולקבל גרף 4־פתיר. לא הצלחתי להגיע לתשובה.

[7] בהוכחה המקורית ב־[2] הניסוח משתמש בפולינומים באופן ישיר.

α הפונקציה $\eta - \alpha \cdot \mathbf{1}_u + \alpha \cdot \mathbf{1}_v$ צריכה להיות אי־שלילית, נובע ש־$\eta(u) - \alpha \geq 0$. נסיק ש־$\alpha \leq \eta(u) \leq f(u) - 1$. מצד שני מההנחה $c_{G,\eta} \neq 0$ נובע $\alpha \geq 0$. לכן לכל צומת w השונה מ־v, מתקיים:

$$\eta'(w) \leq \eta(w) \leq f(w) - 1$$

עבור v מתקיים:

$$\eta'(v) = \eta(v) + \alpha + 1 \leq f(v) - 1 + f(u) - 1 + 1 = f(v) + f(u) + 1$$

בסך הכל, נסיק $\eta' + 1 \leq f + f(u) \cdot \mathbf{1}_v$ וביחד עם $c_{G \cup uv, \eta'} \neq 0$, נובע ש־$(G \cup uv, f + f(u) \cdot \mathbf{1}_v) \in \mathcal{AT}$.

■

ממסקנה 1.3 והטענה הקודמת נובע:

מסקנה 3.10 לגרף מישורי G מתקיים $AT(G) \leq 5$.

4 הוכחת התוצאה העיקרית

הגדרה 4.1 בהנתן גרף במישור G, קשת $e = v_1 v_2$ על הפאה החיצונית, וזיווג M ב־G כך ש־$e \in M$, נאמר ש־(G, e, M) היא שלישיה נאותה.

הגדרה 4.2 תהי (G, e, M) היא שלישיה נאותה. נגדיר $f_{G,e,M} : V(G) \to \mathbb{N}$ על ידי:

$$f_{G,e,M}(v) = \begin{cases} 1 & v \in e \\ 2 & \text{אחרת, אם } v \text{ מכוסה על ידי } M \text{ ונמצא בפאה החיצונית} \\ 3 & \text{אחרת אם } v \text{ בפאה החיצונית} \\ 4 & \text{אחרת} \end{cases}$$

משפט 0.1 הוא מסקנה מיידית של הטענה הבאה, שאותה נוכיח באינדוקציה:

טענה 4.3 יהי G גרף במישור, ותהי e קשת בפאה החיצונית שלו. אזי יש זיווג M כך ש־(G, e, M) היא שלישיה נאותה ו־$G - M$ הוא $f_{G,e,M}$־אלון–טרסי.

הוכחה: נניח בשלילה קיום של דוגמה נגדית (G, e) עם מספר צמתים מינימלי. אם ב־G יש רק שני צמתים, הטענה טריוויאלית. אחרת נוכל להוסיף ל־G קשתות, עד שיהפוך לגרף קשיר $\bar{G}$ שהפאה החיצונית שלו היא מעגל וזאת מבלי לשנות את קבוצת הצמתים הנמצאים בפאה החיצונית, וכך ש־e תישאר בפאה החיצונית. נוכיח את הטענה לגבי הגרף $\bar{G}$, כלומר שיש זיווג $\bar{M}$ כך ש־$(\bar{G}, e, \bar{M})$ היא שלישיה נאותה ו־$\bar{G} - \bar{M}$ הוא $f_{\bar{G},e,\bar{M}}$־אלון–טרסי. נגדיר $M = \bar{M} \cap G$, אז מאחר ש־$G - M \subseteq \bar{G} - \bar{M}$ וכן $f_{\bar{G},e,\bar{M}} \leq f_{G,e,M}$ נובע ש־$G - M$ הוא $f_{G,e,M}$־אלון–טרסי. לכן נוכל להניח בה"כ ש־G קשיר והפאה החיצונית שלו היא מעגל. נסמן אותה ב־$v_1, v_2, \ldots, v_n$ לפי הסדר בכיוון השעון, כאשר $e = v_1 v_2$.

מקרה 1: אם ב־G יש מיתר, נסמן אותו ב־$e_2 = v_i v_j$. הקשת מפרידה את צומתי G לשתי קבוצות שהחיתוך שלהן הוא $\{v_i, v_j\}$, נסמן ב־G_1 וב־G_2 את התת־גרפים המושרים על ידי שתי הקבוצות, כך שהקשת e נמצאת ב־G_1. מהנחת המינימליות, יש זיווגים M_1, M_2, כך שהשלישיות (G_1, e, M_1) ו־(G_2, e_2, M_2) הן נאותות, $G_1 - M_1$ הוא f_{G_1,e,M_1}־אלון–טרסי, ו־$G_2 - M_2$ הוא f_{G_2,e_2,M_2}־אלון–טרסי. לכן יש η_1, η_2 כך ש־$\eta_1 + 1 \leq f_{G_1,e,M_1}$ ו־$\eta_2 + 1 \leq f_{G_2,e_2,M_2}$, ו־$c_{G_2 - M_2, \eta_2}, c_{G_1 - M_1, \eta_1} \neq 0$.

נגדיר $\eta = \eta_1 + \eta_2$,[8] וכן $M = M_1 \sqcup (M_2 - e_2)$. הקבוצה M היא אכן זיווג המכיל את הקשת e. ויש להראות ש־$c_{G-M,\eta} \neq 0$. יהי $D \in or(G - M, \eta)$. נסמן ב־D_1 את הצמצום של D לקשתות של $G_1 - M_1$ וב־D_2 את הצמצום של D לקשתות של $G_2 - M_2$. לכל $v \in V(G_2) - \{v_i, v_j\}$, מתקיים

[8] ליתר דיוק, עלינו לומר קודם שאנו מרחיבים את תחום ההגדרה של η_1 ו־η_2 ל־$V(G)$ כך שהן שוות ל־0 מחוץ לתחום ההגדרה המקורי שלהן.

$\eta_2(v) = \eta(v) = d_D^+(v) = d_{D_2}^+(v)$. מצד שני D_2 הוא אוריינטציה של $G_2 - M_2$, ויש לפחות אוריינטציה אחת של אותו גרף המתאימה ל־η_2, לכן:

$$\sum_{v \in V(G_2)} d_{D_2}^+(v) = |V(G_2)| = \sum_{v \in V(G_2)} \eta_2(v)$$

לכל $v \in \{v_i, v_j\}$, מתקיים $\eta_2(v) = 0$ ומזה יוצא $\eta_2(v) = d_{D_2}^+(v)$ לכל $v \in V(G_2)$, כלומר ש־D_2 מתאימה ל־η_2.

מתקיים $\eta_1 + \eta_2 = \eta = d_D^+ = d_{D_1}^+ + d_{D_2}$, לכן גם $\eta_1 = d_{D_1}^+$. מכך נובע:

$$\begin{aligned} c_{G-M,\eta} &= \sum_{D \in or(G-M),\eta} s(D) = \sum_{D_1 \in or(G_1-M_1),\eta_1} \sum_{D_2 \in or(G_2-M_2),\eta_2} s(D_1)s(D_2) \\ &= c_{G_1-M_1,\eta_1} c_{G_2-M_2,\eta_2} \neq 0 \end{aligned}$$

מקרה 2: אם ב־G אין מיתר, נגדיר $G' = G - v_n$. הקשת e נמצאת על השפה של G', לכן מהנחת המינימליות, יש זיווג M' כך ש־(G', e, M') שלישייה נאותה ו־$G' - M'$ הוא $f_{G',e,M'}$־אלון–טרסי.

נסמן את השכנים של של v_n לפי הסדר נגד כיוון השעון ב־$v_{n-1}, u_1, \ldots, u_k, v_1$.

עבור $1 \leq l \leq k$, נגדיר $f_l = f_{G',e,M'} - \mathbf{1}_{v_{n-1}} + \mathbf{1}_{u_l}$

מקרה 2א: אם יש שלישיה נאותה (G', e, M') כך ש־$G' - M'$ הוא f_l־אלון–טרסי, אז יהי $\eta' \leq f_l - 1$ כך ש־$c_{G'-M',\eta'} \neq 0$. נגדיר $\eta = \eta' + \mathbf{1}_{v_n} + \mathbf{1}_{\{u_1,\ldots u_k\}-\{u_l\}} + \mathbf{1}_{v_{n-1}}$ וכן $M = M' \sqcup \{v_n u_l\}$. מתקיים

$$\begin{aligned} \eta + 1 &= \eta' + 1 + \mathbf{1}_{v_n} + \mathbf{1}_{\{u_1,\ldots u_k\}-\{u_l\}} + \mathbf{1}_{v_{n-1}} \\ &\leq f_l + \mathbf{1}_{v_n} + \mathbf{1}_{\{u_1,\ldots u_k\}-\{u_l\}} + \mathbf{1}_{v_{n-1}} \\ &= f_{G',e,M'} - \mathbf{1}_{v_{n-1}} + \mathbf{1}_{u_l} + \mathbf{1}_{v_n} + \mathbf{1}_{\{u_1,\ldots u_k\}-\{u_l\}} + \mathbf{1}_{v_{n-1}} \\ &= f_{G',e,M'} + \mathbf{1}_{v_n} + \mathbf{1}_{\{u_1,\ldots u_k\}} \leq f_{G,e,M} \end{aligned}$$

כאשר האי־שיוויון האחרון מתקבל מבדיקת מקרים ושימוש בהגדרת f. אם D אוריינטציה של $G - M$ המתאימה ל־η, אז הקשת $v_n v_1$ חייבת להצביע בכיוון v_1, כי $\eta(v_1) = 0$. מאחר ש־$\eta(v_n) = 1$, אף קשת אחרת לא יכולה לצאת מ־v_n, אז כל הקשתות האחרות החלות ב־v_n חייבות להצביע בכיוון v_n.

$$\begin{aligned} c_{G-M,\eta} &= \sum_{D \in or(G-M,\eta)} s(D) \\ &= \left(s(v_n v_1) \prod_{i \in \{1,\ldots,k\}-\{l\}} s(v_i v_n) \right) \sum_{D' \in or(G'-M',\eta')} s(D') \\ &= \pm c_{G'-M',\eta'} \neq 0 \end{aligned}$$

מקרה 2ב: אחרת, נשתמש בכך ש־$G' - M'$ הוא $f_{G',e,M'}$־אלון–טרסי. כלומר, יש $\eta' \leq f_{G',e,M'} - 1$ כך ש־$c_{G'-M',\eta} \neq 0$.

נגדיר $\eta = \eta' + 2 \cdot \mathbf{1}_{v_n} + \mathbf{1}_{\{u_1,\ldots u_k\}}$, וכן $M = M'$. בדיקה מראה ש־$\eta \leq f_{G,e,M} - 1$. אם D אוריינטציה של $G - M$ המתאימה ל־η, אז גם במקרה זה הקשת $v_n v_1$ חייבת להצביע בכיוון v_1. מבין שאר הקשתות החלות ב־v_n חייבות להיות בדיוק קשת אחת נוספת המכוונת הרחק מ־v_n. לכן:

$$c_{G-M,\eta} = \sum_{D\in or(G-M,\eta)} s(D) = \sum_{\substack{D\in or(G-M,\eta),\\ \overrightarrow{v_n v_{n-1}}\in D}} s(D) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{D\in or(G-M,\eta),\\ \overrightarrow{v_n u_i}\in D}} s(D)$$

$$= \epsilon c_{G'-M',\eta'} + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i c_{G'-M',\eta'-\mathbf{1}_{v_{n-1}}+\mathbf{1}_{u_i}} = \epsilon c_{G'-M',\eta'} \neq 0$$

כאשר $\epsilon,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k \in \{-1,1\}$, והשוויון האחרון נובע מכך ש-$c_{G'-M',\eta'-\mathbf{1}_{v_{n-1}}+\mathbf{1}_{u_i}} = 0$ כי התנאי של מקרה 2א לא מתקיים. ■

References

[1] Noga Alon and Michael Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12:125–134, 1992.

[2] Jaroslaw Grytczuk and Xuding Zhu. The alon-tarsi number of a planar graph minus a matching, 2018.

[3] Uwe Schauz. Mr. paint and mrs. correct. *the electronic journal of combinatorics*, 16(1):R77, 2009.

[4] Uwe Schauz. A paintability version of the combinatorial nullstellensatz, and list colorings of k-partite k-uniform hypergraphs. *the electronic journal of combinatorics*, pages R176–R176, 2010.

[5] Carsten Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 62:180–181, 1994.